

Министерство образования и науки Российской Федерации
Сибирский федеральный университет

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

**Сборник заданий
для самостоятельной работы студентов**

Красноярск
СФУ
2012

УДК 51 (07)
ББК 22.14 я 73
Л591

Составители: О.В. Кравцова, В.В. Попова, А.П. Коваленко

Л591 **Линейная** алгебра: сборник заданий для самостоятельной работы студентов [Текст] / сост. О.В. Кравцова, В.В. Попова, А.П. Коваленко. – Красноярск: Сиб. федер. ун-т, 2012. – 20 с.

Сборник содержит комплекты индивидуальных заданий для самостоятельной работы студентов первого курса по дисциплине «Линейная алгебра». Представлены разделы: комплексные числа и многочлены, линейная и векторная алгебра, аналитическая геометрия.

Предназначен для студентов направлений подготовки 080100.62 «Экономика», 080200.62 «Менеджмент» заочной формы обучения.

УДК 51 (07)
ББК 22.14 я 73

© Сибирский
федеральный
университет, 2012

ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ

Сборник заданий предназначен для самостоятельной работы студентов направлений подготовки 080100.62, 080104.62 по дисциплине «Линейная алгебра» и направления 080200.62 по дисциплине «Математика» (заочная форма обучения, первый семестр, контрольная работа № 1). Задания соответствуют Федеральным государственным образовательным стандартам и учебной программе дисциплины.

Предлагаемый сборник содержит задания по следующим разделам:

- комплексные числа и многочлены,
- векторная алгебра,
- линейные пространства,
- аналитическая геометрия.

При выполнении контрольной работы необходимо строго придерживаться указанных ниже правил. Работы, выполненные без соблюдения этих правил, не зачитываются и возвращаются студенту для переработки.

1. Контрольная работа выполняется в тетради в клетку (12-18 листов) чернилами любого цвета, кроме красного. Необходимо оставлять поля шириной 4-5 см для замечаний рецензента.

2. В заголовке работы на обложке тетради должны быть ясно написаны фамилия студента, его инициалы, учебный номер (шифр), номер направления подготовки (специальности), название дисциплины. В конце работы следует поставить подпись студента и дату выполнения работы.

3. В работу должны быть включены все задачи, указанные в задании, строго по положенному варианту. Вариант определяется последней цифрой учебного номера (номера зачетной книжки). Цифре 0 соответствует вариант № 10. Определив свой номер варианта, студент выполняет по одной задаче из каждых десяти, объединенных общей формулировкой. Например, варианту № 10 соответствуют задачи 1.10, 2.10, 3.10, . . . , 20.10. Контрольные работы, содержащие не все задачи, либо задачи не своего варианта, не зачитываются.

4. Решения задач надо располагать в порядке возрастания их номеров, указанных в заданиях, сохраняя номера задач.

5. Перед решением каждой задачи надо полностью выписать ее условие. Переписывая условие задачи, следует заменить общие данные конкретными, взятыми из соответствующего номера.

6. Решение задач следует излагать подробно и аккуратно, объясняя и мотивируя все действия по ходу решения и делая необходимые чертежи.

7. После получения прорецензированной работы, как незачтенной, так и зачтенной, студент должен исправить все отмеченные рецензентом ошибки и недочеты и выполнить все рекомендации рецензента.

Если рецензент предлагает внести в решения задач те или иные исправления и дополнения и прислать их для повторной проверки, то это следует сделать в короткий срок.

В случае незачета работы и отсутствия прямого указания рецензента о том, что студент может ограничиться представлением исправленных решений отдельных задач, вся работа должна быть выполнена заново.

При высылаемых исправлениях должна обязательно находиться прорецензированная работа и рецензия на нее. Поэтому рекомендуется при выполнении контрольной работы оставлять в конце тетради несколько чистых листов для всех дополнений и исправлений в соответствии с указаниями рецензента. Вносить исправления в сам текст работы после ее рецензирования запрещается.

1. Вычислить.

$$1.1. \quad i^{12} + \frac{(3-4i)(3+2i)}{4+3i} + |1+i|^2.$$

$$1.2. \quad i|2+i|^2 + \frac{(1+4i)(-1+4i)}{4-i} + \overline{2+3i}.$$

$$1.3. \quad \frac{(4-2i)(-3+2i)}{1-3i} + |6+8i| - \overline{i^5(2-i)}.$$

$$1.4. \quad i^{13} + |4+i|^2 + \frac{(2-i)(-5+i)}{2-3i}.$$

$$1.5. \quad |1-i|^2 + \frac{(5-3i)(-3-2i)}{4+i} + \overline{1-3i}.$$

$$1.6. \quad \frac{(4-4i)(1+2i)}{4-2i} + i|8-6i| - \overline{i^6(3-2i)}.$$

$$1.7. \quad |1-3i|^2 + i^{14} + \frac{(2-2i)(-3+4i)}{3+i}.$$

$$1.8. \quad |1-4i|^2 + \frac{(1+3i)(-4-2i)}{2-2i} + \overline{2-5i}.$$

$$1.9. \quad \frac{(3+i)(2-5i)}{5+2i} + |12+5i| - \overline{i^7(1+i)}.$$

$$1.10. \quad i^{11} + i|3+i|^2 + \frac{(1+2i)(-4+2i)}{1-3i}.$$

2. Найти значение выражения, записать результат в алгебраической форме.

$$2.1. \quad \frac{(z\bar{w})^8}{t}, \quad z = -1 + i, \quad w = 2(\cos 5^\circ + i \sin 5^\circ), \\ t = 6 \left(\cos \frac{4\pi}{9} + i \sin \frac{4\pi}{9} \right).$$

$$2.2. \quad \frac{t}{z^8 \bar{w}}, \quad z = -1 - i\sqrt{3}, \quad w = 2(\cos 130^\circ + i \sin 130^\circ), \\ t = 4\sqrt{2} \left(\cos \frac{13\pi}{9} + i \sin \frac{13\pi}{9} \right).$$

$$2.3. \quad \left(\frac{zw}{t} \right)^8, \quad z = -2 + 2i, \quad w = 2(\cos 5^\circ + i \sin 5^\circ), \\ t = \sqrt{2} \left(\cos \frac{7\pi}{18} + i \sin \frac{7\pi}{18} \right).$$

$$2.4. \quad z \left(\frac{t}{\bar{w}} \right)^6, \quad z = \sqrt{3} - 3i, \quad w = 2\sqrt{3}(\cos 75^\circ + i \sin 75^\circ),$$

$$t = \sqrt{6} \left(\cos \frac{2\pi}{9} + i \sin \frac{2\pi}{9} \right).$$

$$2.5. \quad \left(\frac{z\bar{w}}{t} \right)^8, \quad z = \frac{-1+i}{5}, \quad w = 5(\cos 5^\circ + i \sin 5^\circ),$$

$$t = \sqrt{2} \left(\cos \frac{7\pi}{18} + i \sin \frac{7\pi}{18} \right).$$

$$2.6. \quad \frac{t}{(z\bar{w})^7}, \quad z = \sqrt{3} + i, \quad w = 3(\cos 10^\circ + i \sin 10^\circ),$$

$$t = 4 \left(\cos \frac{8\pi}{9} + i \sin \frac{8\pi}{9} \right).$$

$$2.7. \quad \frac{z^6 \bar{w}}{t}, \quad z = 2\sqrt{3} - 2i, \quad w = 3(\cos 75^\circ + i \sin 75^\circ),$$

$$t = 12 \left(\cos \frac{17\pi}{12} + i \sin \frac{17\pi}{12} \right).$$

$$2.8. \quad \left(\frac{\bar{t}}{z\bar{w}} \right)^9, \quad z = 1 - i\sqrt{3}, \quad w = 3(\cos 75^\circ + i \sin 75^\circ),$$

$$t = 4\sqrt{2} \left(\cos \frac{13\pi}{9} + i \sin \frac{13\pi}{9} \right).$$

$$2.9. \quad z \left(\frac{\bar{w}}{t} \right)^5, \quad z = -3\sqrt{3} - 3i, \quad w = 2\sqrt{3}(\cos 160^\circ + i \sin 160^\circ),$$

$$t = 3\sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{10} + i \sin \frac{\pi}{10} \right).$$

$$2.10. \quad \left(\frac{t}{z\bar{w}} \right)^9, \quad z = \sqrt{3} - 3i, \quad w = 2\sqrt{2}(\cos 75^\circ + i \sin 75^\circ),$$

$$t = \sqrt{12} \left(\cos \frac{13\pi}{9} + i \sin \frac{13\pi}{9} \right).$$

3. Изобразить на комплексной плоскости множество чисел, удовлетворяющих данному условию.

$$3.1. \quad |z - 1 + 2i| = 3. \quad 3.2. \quad \operatorname{Im}(2z + \bar{z} + 1 - 2i) = 4.$$

$$3.3. \quad \operatorname{Re}(2z + \bar{z}) = 3. \quad 3.4. \quad \frac{\pi}{6} \leq \arg z \leq \frac{\pi}{3}.$$

$$3.5. \quad |z + 1 - i| = 2. \quad 3.6. \quad \operatorname{Im}(3z + \bar{z} - 1 + i) = 3.$$

$$3.7. \operatorname{Re}(3z + \bar{z} + 2i) = 5. \quad 3.8. \frac{\pi}{4} \leq \arg(z - i) \leq \frac{\pi}{2}.$$

$$3.9. \frac{\pi}{4} \leq \arg(\bar{z}) \leq \frac{\pi}{2}. \quad 3.10. \operatorname{Im}(4z - \bar{z} - i) = 5.$$

4. Найти все корни многочлена.

$$4.1. f(x) = x^3 - 4x^2 + x + 26. \quad 4.2. f(x) = x^3 - 3x^2 + 16x + 20.$$

$$4.3. f(x) = x^3 + 9x^2 + 24x - 34. \quad 4.4. f(x) = x^3 + 6x^2 + 9x - 50.$$

$$4.5. f(x) = x^3 + 6x + 20. \quad 4.6. f(x) = x^3 + 13x^2 + 49x + 37.$$

$$4.7. f(x) = x^3 + 3x^2 + x - 5. \quad 4.8. f(x) = x^3 + x - 10.$$

$$4.9. f(x) = x^3 + 8x^2 + 30x + 36. \quad 4.10. f(x) = x^3 - 5x^2 + 4x + 10.$$

5. Выполнить действия с матрицами.

$$5.1. \text{Найти } BA, E + C^2, AB + 3C^T, \text{ если } A = \begin{pmatrix} -10 & 3 & -4 \\ 5 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 2 & 0 \\ 4 & -6 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} -10 & 7 \\ -5 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$5.2. \text{Найти } BA, (E + C)^2, C(A + 2B^T), \text{ если } A = \begin{pmatrix} -7 & -1 & 1 \\ -5 & 5 & -1 \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 5 & -4 \\ 6 & -4 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

$$5.3. \text{Найти } BB^T, C^2 - 2E, (2A^T + B)C, \text{ если } A = \begin{pmatrix} -5 & 6 & -8 \\ 3 & 1 & -9 \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 8 & 7 \\ -7 & 10 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$5.4. \text{Найти } AB, (C - 4E)^2, B^T A^T - 3C, \text{ если } A = \begin{pmatrix} -4 & 5 & -7 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ 1 & 1 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 7 & -9 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

5.5. Найти BA , $3E + C^2$, $AB - 4C^T$, если $A = \begin{pmatrix} 5 & -6 & -5 \\ 0 & -9 & 10 \end{pmatrix}$,

$$B = \begin{pmatrix} 2 & -6 \\ 2 & -5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 3 & 8 \\ -5 & 4 \end{pmatrix}.$$

5.6. Найти BA , $(C + E)^2$, $C(A + 4B^T)$, если $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -6 \\ 1 & 0 & -6 \end{pmatrix}$,

$$B = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -3 & 0 \\ -10 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 10 \end{pmatrix}.$$

5.7. Найти $B^T B$, $C^2 - 4E$, $(2A^T + B)C$, если $A = \begin{pmatrix} 8 & -4 & 1 \\ 9 & -8 & 5 \end{pmatrix}$,

$$B = \begin{pmatrix} 8 & -5 \\ 2 & 7 \\ 9 & 8 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

5.8. Найти AB , $E + C + C^2$, $B^T A^T + 2C$, если $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -6 \\ -1 & -5 & 8 \end{pmatrix}$,

$$B = \begin{pmatrix} 10 & -2 \\ 4 & 2 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} -6 & 7 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}.$$

5.9. Найти BA , $C^2 - C - E$, $AB + 5C^T$, если $A = \begin{pmatrix} -5 & 6 & -6 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$,

$$B = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -2 & 6 \\ -8 & 3 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} -9 & 4 \\ 6 & -1 \end{pmatrix}.$$

5.10. Найти BA , $C^2 + 5E$, $C(A + 2B^T)$, если $A = \begin{pmatrix} -6 & 4 & -1 \\ 10 & -4 & 10 \end{pmatrix}$,

$$B = \begin{pmatrix} 10 & 7 \\ 2 & 2 \\ 7 & 4 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -8 & 5 \end{pmatrix}.$$

6. Вычислить определители.

$$6.1. \quad \text{a)} \quad \begin{vmatrix} -10 & 6 & 3 \\ 6 & 4 & 1 \\ -6 & 4 & 2 \end{vmatrix};$$

$$\text{б)} \quad \begin{vmatrix} 6 & -7 & 4 & -9 \\ 7 & -8 & 10 & -7 \\ 8 & -9 & 14 & -6 \\ 5 & -6 & -7 & -14 \end{vmatrix}.$$

$$6.2. \quad \text{a)} \quad \begin{vmatrix} 4 & -7 & 9 \\ -1 & 5 & 1 \\ 1 & 0 & 5 \end{vmatrix};$$

$$\text{б)} \quad \begin{vmatrix} 5 & -3 & 2 & -1 \\ 4 & -2 & -5 & 1 \\ 14 & -8 & -11 & -10 \\ 13 & -7 & -9 & 0 \end{vmatrix}.$$

$$6.3. \quad \text{a)} \quad \begin{vmatrix} -5 & 7 & 4 \\ -4 & 8 & 4 \\ 6 & 8 & 0 \end{vmatrix};$$

$$\text{б)} \quad \begin{vmatrix} 7 & -4 & 9 & -7 \\ 6 & -3 & 8 & -6 \\ 1 & 2 & 7 & 4 \\ 12 & -9 & 13 & -13 \end{vmatrix}.$$

$$6.4. \quad \text{a)} \quad \begin{vmatrix} -8 & -10 & -4 \\ 4 & 5 & 5 \\ 5 & 7 & 4 \end{vmatrix};$$

$$\text{б)} \quad \begin{vmatrix} 7 & 3 & -7 & 1 \\ 8 & 4 & -4 & 2 \\ 4 & 0 & -10 & -7 \\ 11 & 7 & 4 & 6 \end{vmatrix}.$$

$$6.5. \quad \text{a)} \quad \begin{vmatrix} 7 & -2 & 1 \\ 1 & 6 & 5 \\ -5 & 10 & 6 \end{vmatrix};$$

$$\text{б)} \quad \begin{vmatrix} 1 & -2 & 6 & 10 \\ 3 & -1 & -6 & -9 \\ 9 & -8 & 5 & 9 \\ 11 & -7 & -8 & -14 \end{vmatrix}.$$

$$6.6. \quad \text{a)} \quad \begin{vmatrix} 5 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 5 \\ 7 & 3 & 2 \end{vmatrix};$$

$$\text{б)} \quad \begin{vmatrix} 3 & 0 & -4 & 6 \\ 2 & 2 & -2 & -10 \\ 8 & 2 & -5 & -6 \\ 7 & 4 & -11 & -9 \end{vmatrix}.$$

$$6.7. \quad \text{a)} \quad \begin{vmatrix} 10 & 6 & 1 \\ 1 & 6 & 5 \\ 9 & -1 & -5 \end{vmatrix};$$

$$\text{б)} \quad \begin{vmatrix} 3 & -7 & -3 & -1 \\ 4 & -7 & -6 & 1 \\ 10 & -14 & -14 & -3 \\ 4 & -14 & 1 & -8 \end{vmatrix}.$$

$$6.8. \quad \text{a)} \quad \begin{vmatrix} 5 & 2 & -8 \\ -2 & 3 & 9 \\ 3 & 2 & -3 \end{vmatrix};$$

$$\text{б)} \quad \begin{vmatrix} 2 & -3 & 7 & -7 \\ 6 & -5 & 5 & 6 \\ 10 & -11 & 14 & -7 \\ 14 & -13 & 11 & 6 \end{vmatrix}.$$

$$6.9. \quad \text{a)} \quad \begin{vmatrix} 4 & 0 & 3 \\ 10 & 2 & 10 \\ 3 & -6 & -5 \end{vmatrix};$$

$$\text{б)} \quad \begin{vmatrix} 2 & -3 & -10 & 8 \\ 3 & 0 & -10 & 8 \\ 4 & 3 & -11 & -2 \\ 1 & -6 & -10 & 7 \end{vmatrix}.$$

$$6.10. \quad \text{a)} \quad \begin{vmatrix} 2 & -6 & 1 \\ 5 & -6 & 2 \\ 10 & -2 & 4 \end{vmatrix};$$

$$\text{б)} \quad \begin{vmatrix} 4 & 6 & 2 & -6 \\ 5 & 10 & 8 & 3 \\ 6 & 14 & 9 & 8 \\ 3 & 2 & 0 & -12 \end{vmatrix}.$$

7. Решить систему уравнений:

1) методом Крамера,

2) с помощью обратной матрицы.

$$7.1. \quad \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 3, \\ 2x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$$

$$7.2. \quad \begin{cases} 4x_1 - 2x_2 - x_3 = 6, \\ x_1 - 2x_2 - x_3 = 0, \\ 3x_1 - 5x_2 - 3x_3 = 0. \end{cases}$$

$$7.3. \quad \begin{cases} 4x_1 - x_2 - 2x_3 = -10, \\ 4x_1 + x_2 - 4x_3 = -16, \\ x_1 - x_2 - x_3 = -4. \end{cases}$$

$$7.4. \quad \begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 16, \\ 5x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 18, \\ 5x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 18. \end{cases}$$

$$7.5. \quad \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 13, \\ 4x_1 - 5x_2 - 4x_3 = -24, \\ 2x_1 - 2x_2 - x_3 = -7. \end{cases}$$

$$7.6. \quad \begin{cases} x_1 - 3x_2 + x_3 = 8, \\ x_1 - x_2 - 2x_3 = -10, \\ x_1 - 2x_2 - 5x_3 = -28. \end{cases}$$

$$7.7. \quad \begin{cases} 4x_1 + 4x_2 - 5x_3 = -39, \\ 3x_1 - 2x_2 - 3x_3 = -24, \\ 2x_1 - 5x_2 - x_3 = -9. \end{cases}$$

$$7.8. \quad \begin{cases} 5x_1 - 5x_2 + 3x_3 = 34, \\ 2x_1 - 4x_2 + 4x_3 = 36, \\ 4x_1 + x_2 - 5x_3 = -32. \end{cases}$$

$$7.9. \quad \begin{cases} 4x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 23, \\ x_1 + x_2 - x_3 = -10, \\ 4x_1 + 4x_2 - 5x_3 = -49. \end{cases}$$

$$7.10. \quad \begin{cases} 3x_1 - 4x_2 - 5x_3 = 2, \\ 4x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 11, \\ x_1 + x_2 - x_3 = 3. \end{cases}$$

8. Найти ранг матрицы.

$$8.1. \quad \begin{pmatrix} 1 & 7 & 0 & 3 \\ 2 & -8 & -4 & -1 \\ 5 & -9 & -7 & 1 \\ 4 & 6 & -4 & 5 \end{pmatrix}.$$

$$8.2. \quad \begin{pmatrix} 7 & 3 & 6 & 4 \\ 5 & -1 & 4 & 5 \\ 9 & 7 & 9 & 3 \\ 3 & -5 & 2 & 7 \end{pmatrix}.$$

$$8.3. \begin{pmatrix} 2 & -6 & -4 & 7 \\ 3 & -7 & -1 & 5 \\ 1 & -5 & -7 & 9 \\ 4 & -8 & 2 & 3 \end{pmatrix}. \quad 8.4. \begin{pmatrix} 6 & 1 & -5 & 2 \\ 5 & -4 & -2 & -1 \\ 4 & -9 & 2 & -4 \\ 7 & 6 & -8 & 5 \end{pmatrix}.$$

$$8.5. \begin{pmatrix} 4 & 8 & -1 & 3 \\ 5 & 7 & -2 & 2 \\ 6 & 6 & -2 & 1 \\ 3 & 9 & 0 & 5 \end{pmatrix}. \quad 8.6. \begin{pmatrix} 3 & -2 & 7 & 3 \\ 5 & -1 & 6 & -1 \\ 1 & -3 & 8 & 7 \\ 7 & 0 & 5 & -5 \end{pmatrix}.$$

$$8.7. \begin{pmatrix} 3 & -4 & 6 & -4 \\ 1 & 6 & -5 & 5 \\ 5 & 8 & -3 & 6 \\ 7 & -2 & 7 & -3 \end{pmatrix}. \quad 8.8. \begin{pmatrix} 3 & 5 & 3 & 2 \\ 5 & 7 & 1 & -4 \\ 1 & 3 & 6 & 8 \\ 7 & 9 & -1 & -9 \end{pmatrix}.$$

$$8.9. \begin{pmatrix} 7 & -5 & 3 & 5 \\ 6 & -6 & 5 & 2 \\ 8 & -4 & 1 & 8 \\ 5 & -7 & 7 & -1 \end{pmatrix}. \quad 8.10. \begin{pmatrix} 2 & -5 & 8 & -1 \\ 3 & 1 & -7 & 5 \\ 8 & -3 & -5 & 9 \\ 7 & -9 & 9 & 3 \end{pmatrix}.$$

9. Найти общее решение системы линейных уравнений.

$$9.1. \begin{cases} 5x_1 + 2x_2 - 7x_3 - 6x_4 = 7; \\ 6x_1 + 4x_2 - 3x_3 + 3x_4 = 10; \\ 11x_1 + 6x_2 - 9x_3 - 2x_4 = 17. \end{cases}$$

$$9.2. \begin{cases} 3x_1 - x_2 - 5x_3 + 6x_4 = -6; \\ x_1 - 3x_2 - 7x_3 - 6x_4 = -10; \\ x_1 + x_2 + x_3 + 6x_4 = 2. \end{cases}$$

$$9.3. \begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 + 8x_4 = 11; \\ 3x_1 - 2x_2 - 7x_3 - 11x_4 = -18; \\ 7x_1 - 5x_2 - 10x_3 - 12x_4 = -22. \end{cases}$$

$$9.4. \begin{cases} 5x_1 + 2x_2 + 12x_3 - 3x_4 = 17; \\ x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 = 2; \\ x_1 - 8x_2 - 6x_3 - 9x_4 = -5. \end{cases}$$

$$9.5. \begin{cases} 3x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 7x_4 = 10; \\ 7x_1 + 4x_2 - 2x_3 + 14x_4 = 18; \\ 10x_1 - 2x_2 + 5x_3 + 12x_4 = 10. \end{cases}$$

$$9.6. \quad \begin{cases} 3x_1 + 8x_2 + 13x_3 - 13x_4 = 11; \\ x_1 - x_2 - 3x_3 + 3x_4 = 0; \\ 12x_1 - x_2 - 14x_3 + 14x_4 = 11. \end{cases}$$

$$9.7. \quad \begin{cases} 3x_1 + 8x_2 - 7x_3 - 11x_4 = 1; \\ 5x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 5; \\ 13x_1 + 14x_2 - 2x_3 - 4x_4 = 12. \end{cases}$$

$$9.8. \quad \begin{cases} x_1 + 4x_2 - x_3 - 2x_4 = -3; \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 3; \\ x_1 - 2x_2 + 5x_3 + 4x_4 = 9. \end{cases}$$

$$9.9. \quad \begin{cases} 6x_1 + x_2 + 7x_3 + 2x_4 = 13; \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 4; \\ 14x_1 - 5x_2 + 8x_3 - 9x_4 = 22. \end{cases}$$

$$9.10. \quad \begin{cases} 4x_1 - x_2 - 13x_3 + 9x_4 = 8; \\ x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 2; \\ 8x_1 + 13x_2 - 11x_3 + 3x_4 = 16. \end{cases}$$

10. Найти общее решение однородной системы линейных уравнений, записать фундаментальную систему решений.

$$10.1. \quad \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 0; \\ 3x_1 + 4x_2 - x_3 + x_4 = 0. \end{cases} \quad 10.2. \quad \begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0; \\ 4x_1 - 3x_2 - x_3 - 3x_4 = 0. \end{cases}$$

$$10.3. \quad \begin{cases} 4x_1 - 5x_2 + 3x_3 + x_4 = 0; \\ 8x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 = 0. \end{cases} \quad 10.4. \quad \begin{cases} 3x_1 - 5x_2 + x_3 - 2x_4 = 0; \\ 3x_1 - 4x_2 + x_3 - x_4 = 0. \end{cases}$$

$$10.5. \quad \begin{cases} x_1 - 7x_2 + 3x_3 - x_4 = 0; \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0. \end{cases} \quad 10.6. \quad \begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 = 0; \\ 9x_1 + 7x_2 - 2x_3 + x_4 = 0. \end{cases}$$

$$10.7. \quad \begin{cases} 4x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0; \\ 7x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 = 0. \end{cases} \quad 10.8. \quad \begin{cases} x_1 - 8x_2 + 7x_3 - 6x_4 = 0; \\ 5x_1 - 6x_2 + x_3 + 4x_4 = 0. \end{cases}$$

$$10.9. \quad \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_4 = 0; \\ 5x_1 - 6x_2 + 3x_3 - x_4 = 0. \end{cases} \quad 10.10. \quad \begin{cases} x_1 + 4x_2 - x_3 - 2x_4 = 0; \\ 4x_1 - 5x_2 + 2x_3 + x_4 = 0. \end{cases}$$

11. Найти координаты вектора \vec{x} в базисе $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$.

11.1. $\vec{x} = (-16, 19, 9), \vec{e}_1 = (-7, 4, 2), \vec{e}_2 = (4, 3, 1), \vec{e}_3 = (-4, 3, 1).$

11.2. $\vec{x} = (7, 16, -10), \vec{e}_1 = (-7, 3, 7), \vec{e}_2 = (4, 4, -5), \vec{e}_3 = (-5, 6, 4).$

11.3. $\vec{x} = (-6, 9, 7), \vec{e}_1 = (3, 3, 5), \vec{e}_2 = (-2, 5, 5), \vec{e}_3 = (-6, 6, 4).$

11.4. $\vec{x} = (10, 3, 7), \vec{e}_1 = (4, -6, 1), \vec{e}_2 = (2, 6, 2), \vec{e}_3 = (4, -3, 2).$

11.5. $\vec{x} = (1, -4, 10), \vec{e}_1 = (4, 5, 1), \vec{e}_2 = (6, 6, 6), \vec{e}_3 = (3, 1, 7).$

11.6. $\vec{x} = (2, 14, 10), \vec{e}_1 = (-7, 4, 1), \vec{e}_2 = (-3, 5, 3), \vec{e}_3 = (-3, 6, 3).$

11.7. $\vec{x} = (3, 5, 0), \vec{e}_1 = (6, 7, 3), \vec{e}_2 = (3, 4, 3), \vec{e}_3 = (3, 5, 3).$

11.8. $\vec{x} = (17, 6, 11), \vec{e}_1 = (6, 3, 6), \vec{e}_2 = (5, 2, 5), \vec{e}_3 = (1, 2, 4).$

11.9. $\vec{x} = (-10, 1, 9), \vec{e}_1 = (-3, 4, 6), \vec{e}_2 = (5, 5, 0), \vec{e}_3 = (2, 1, -1).$

11.10. $\vec{x} = (13, 6, 7), \vec{e}_1 = (4, 2, 2), \vec{e}_2 = (2, 2, 3), \vec{e}_3 = (5, 2, 2).$

12. Даны координаты точек A, B, C в декартовой прямоугольной системе координат. Найти:

1) $\cos \angle BAC$;

2) площадь $\triangle ABC$;

3) высоту BN треугольника $\triangle ABC$;

4) объем пирамиды $OABC$, где O – начало координат;

5) высоту OP пирамиды $OABC$.

12.1. $A(-9, -9, 7), B(-12, -15, 5), C(-7, -3, 10).$

12.2. $A(-4, -8, 2), B(-8, -7, 10), C(0, -4, -5).$

12.3. $A(-8, -8, -7), B(-10, -7, -5), C(-5, -4, -7).$

12.4. $A(3, -6, -5), B(10, 0, 1), C(-3, -3, 1).$

12.5. $A(-6, -9, 6), B(-10, -17, 5), C(-10, -11, 10).$

12.6. $A(3, -6, 9), B(-3, -9, 11), C(-1, 1, 5).$

12.7. $A(-2, -8, 1), B(-4, -5, 7), C(-6, -1, -3).$

12.8. $A(0, -3, 6), B(8, -11, 10), C(4, 4, 2).$

12.9. $A(-6, -7, 9), B(-12, -10, 3), C(-7, -3, 1).$

12.10. $A(-8, -5, 1), B(-14, -3, -2), C(0, -9, -7).$

13. Преобразование φ задано координатами образа произвольного вектора $x = (x_1, x_2, x_3).$

1. Показать, что φ – линейное преобразование.

2. Составить матрицу преобразования $\varphi.$

3. Найти образ вектора a под действием φ и $\varphi^2.$

13.1. $x\varphi = (5x_1 - 5x_2 + 4x_3, -3x_1 - 2x_2, -2x_1 + x_3), a = (1, 2, 3).$

13.2. $x\varphi = (x_1 - 5x_2, -5x_1 + 4x_2 - 5x_3, 5x_2 - x_3), a = (1, 2, -1).$

13.3. $x\varphi = (3x_1 - 2x_2 + 2x_3, 4x_1 + 2x_3, -4x_1 - 2x_2), a = (1, 2, 1).$

13.4. $x\varphi = (4x_2 - 2x_3, -4x_2 + 4x_3, -2x_1 + 3x_2 + 5x_3), a = (1, 2, 0).$

13.5. $x\varphi = (5x_1 + 3x_2 + 2x_3, 3x_1 + 2x_2, -3x_1 + x_3), a = (0, 2, 3).$

13.6. $x\varphi = (2x_2 + 5x_3, -3x_1 + 2x_2 - 2x_3, -5x_1 + 3x_2), a = (0, 2, -1).$

13.7. $x\varphi = (4x_1 + x_3, 2x_2 - 2x_3, -5x_1 + 2x_2 + 5x_3), a = (1, 0, 3).$

13.8. $x\varphi = (3x_1 + 3x_2 - 3x_3, -4x_1 + 5x_2, 4x_2 + 2x_3), a = (1, -2, 1).$

13.9. $x\varphi = (2x_1 + x_3, -2x_1 + 4x_2 - 4x_3, -2x_1 + 5x_2), a = (-1, 2, 1).$

13.10. $x\varphi = (4x_2 - 3x_3, -4x_1 + x_2, -2x_1 - 4x_2 + x_3), a = (3, 2, 1).$

14. Найти собственные значения и собственные векторы линейного преобразования, заданного матрицей.

14.1. $\begin{pmatrix} 6 & 4 & -3 \\ 0 & -7 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$ **14.2.** $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 7 & -7 & -2 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$ **14.3.** $\begin{pmatrix} -4 & -9 & 9 \\ 4 & 8 & -6 \\ 0 & 0 & -7 \end{pmatrix}.$

14.4. $\begin{pmatrix} 3 & 2 & -4 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & -4 & -2 \end{pmatrix}.$ **14.5.** $\begin{pmatrix} 3 & 0 & -4 \\ 5 & 3 & 5 \\ 3 & 0 & -4 \end{pmatrix}.$ **14.6.** $\begin{pmatrix} -2 & 3 & -5 \\ 8 & 8 & 8 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}.$

$$14.7. \begin{pmatrix} 1 & 7 & 3 \\ 0 & -2 & 0 \\ 4 & -2 & -3 \end{pmatrix}. \quad 14.8. \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix}. \quad 14.9. \begin{pmatrix} 7 & -1 & -3 \\ 1 & 9 & -2 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

$$14.10. \begin{pmatrix} 3 & -4 & -4 \\ 0 & 3 & 0 \\ 4 & 6 & -7 \end{pmatrix}.$$

15. Составить уравнение прямой:

- 1) проходящей через точки A и B ;
- 2) проходящей через точку A параллельно вектору \vec{a} ;
- 3) проходящей через точку B перпендикулярно вектору \vec{a} .

Сделать чертеж.

$$15.1. \quad A(-8, -8), \quad B(8, -5), \quad \vec{a} = (-3, 4).$$

$$15.2. \quad A(-2, -5), \quad B(-1, 0), \quad \vec{a} = (-7, 1).$$

$$15.3. \quad A(6, -2), \quad B(5, 8), \quad \vec{a} = (5, -3).$$

$$15.4. \quad A(-5, -2), \quad B(0, -4), \quad \vec{a} = (7, -3).$$

$$15.5. \quad A(1, -6), \quad B(8, -3), \quad \vec{a} = (6, 10).$$

$$15.6. \quad A(1, 8), \quad B(7, -8), \quad \vec{a} = (-6, -6).$$

$$15.7. \quad A(6, 5), \quad B(2, -5), \quad \vec{a} = (4, 3).$$

$$15.8. \quad A(-7, 6), \quad B(1, 8), \quad \vec{a} = (1, 2).$$

$$15.9. \quad A(10, 5), \quad B(-2, -8), \quad \vec{a} = (5, 10).$$

$$15.10. \quad A(6, 6), \quad B(-5, -6), \quad \vec{a} = (9, 6).$$

16. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки A, B, C .
Вычислить расстояние от начала координат до плоскости.

$$16.1. \quad A(-4, -4, 3), \quad B(-3, -2, 2), \quad C(-2, -3, -1).$$

$$16.2. \quad A(-1, -4, 0), \quad B(-4, 3, -4), \quad C(-2, 4, -1).$$

$$16.3. \quad A(2, -2, 2), \quad B(3, 2, -2), \quad C(-3, -2, 0).$$

$$16.4. \quad A(-2, 3, -2), \quad B(0, -3, 3), \quad C(-2, 2, 4).$$

$$16.5. \quad A(0, 3, 3), \quad B(-4, -3, -3), \quad C(0, -4, 1).$$

$$16.6. \quad A(4, 1, 4), \quad B(-2, 2, -2), \quad C(-4, 2, 0).$$

$$16.7. \quad A(3, 0, 1), \quad B(4, 2, -1), \quad C(-4, 2, 4).$$

$$16.8. \quad A(2, 2, -3), \quad B(-3, 4, 3), \quad C(1, 3, 2).$$

$$16.9. \quad A(-3, -3, -2), \quad B(-3, 1, 0), \quad C(-2, -3, 1).$$

$$16.10. \quad A(1, -1, 2), \quad B(0, -1, 3), \quad C(3, -3, -4).$$

17. Даны уравнение плоскости, уравнение прямой и координаты точки A . Составить:

1) уравнение прямой, проходящей через точку A перпендикулярно плоскости,

2) уравнение плоскости, проходящей через точку A параллельно плоскости,

3) уравнение прямой, проходящей через точку A параллельно данной прямой,

4) уравнение плоскости, проходящей через точку A и прямую.

$$17.1. \quad x - 5y + 4z - 3 = 0, \quad \frac{x+4}{5} = \frac{y-3}{-7} = \frac{z+3}{-4}, \quad A(-6, -2, -1).$$

$$17.2. \quad 5x - y + 3z - 2 = 0, \quad \frac{x-3}{3} = \frac{y-6}{-4} = \frac{z-4}{6}, \quad A(-3, -6, -3).$$

$$17.3. \quad 2x - 2y + 3z + 5 = 0, \quad \frac{x}{3} = \frac{y-7}{-8} = \frac{z-6}{2}, \quad A(-8, -6, -6).$$

$$17.4. \quad x + 3y + 2z + 3 = 0, \quad \frac{x-4}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+5}{-1}, \quad A(3, 2, 8).$$

- 17.5. $4x - 2y - 5z + 3 = 0$, $\frac{x}{2} = \frac{y-6}{-8} = \frac{z}{3}$, $A(1, 8, 3)$.
- 17.6. $5x + 3y + 3z - 3 = 0$, $\frac{x+6}{2} = \frac{y-7}{-7} = \frac{z-5}{2}$, $A(2, 6, 3)$.
- 17.7. $x + 2y - 2z - 1 = 0$, $\frac{x-1}{1} = \frac{y-8}{2} = \frac{z+6}{4}$, $A(-6, -4, -5)$.
- 17.8. $4x - 5y - 5z - 5 = 0$, $\frac{x+7}{5} = \frac{y-5}{5} = \frac{z-5}{-6}$, $A(-2, 2, -1)$.
- 17.9. $x - 5y - 5z - 3 = 0$, $\frac{x-3}{2} = \frac{y+5}{-3} = \frac{z-1}{3}$, $A(-4, -2, 6)$.
- 17.10. $4x - 2y + 3z + 3 = 0$, $\frac{x-1}{3} = \frac{y-4}{-7} = \frac{z+2}{-8}$, $A(1, 2, 6)$.

18. Дано уравнение кривой в полярных координатах. Записать уравнение этой кривой в декартовых координатах, построить кривую.

- 18.1 $r = 3 \sin 2\varphi$. 18.2. $r = \frac{3}{1 + \cos \varphi}$. 18.3. $r = \frac{2}{\sin \varphi}$.
- 18.4 $r = 2 \cos 2\varphi$. 18.5. $r = 4 \sin \varphi$. 18.6. $r = \frac{3}{\cos 2\varphi}$.
- 18.7 $r = \frac{2}{1 - \cos \varphi}$. 18.8. $r = 3 \cos \varphi$. 18.9. $r = 5 \sin 3\varphi$.
- 18.10 $\operatorname{tg} \varphi = 3$.

19. Привести уравнение линии второго порядка к каноническому виду. Определить тип кривой, изобразить кривую.

- 19.1. $25x^2 + 4y^2 - 100x - 32y + 64 = 0$.
- 19.2. $x^2 + 25y^2 + 6x + 100y + 84 = 0$.
- 19.3. $25x^2 - 4y^2 - 100x - 32y - 64 = 0$.
- 19.4. $4x^2 - y^2 + 24x - 8y - 16 = 0$.
- 19.5. $y^2 - 10x - 6y - 31 = 0$.
- 19.6. $y^2 + 2x - 8y + 12 = 0$.

19.7. $9x^2 + 25y^2 - 72x + 50y - 56 = 0.$

19.8. $4x^2 + y^2 + 24x - 8y + 16 = 0.$

19.9. $4x^2 - y^2 - 16x - 4y - 24 = 0.$

19.10. $49x^2 - y^2 + 98x + 4y - 4 = 0.$

20. Построить тело, ограниченное поверхностями.

20.1. $x^2 + y^2 = 4,$
 $z = 3 - x - y,$
 $z = 0.$

20.2. $x + y = 4,$
 $y = 4x^2,$
 $z = 2,$
 $z = 0.$

20.3. $y + z = 1,$
 $z = y^2,$
 $x = 1,$
 $x = 0.$

20.4. $x^2 + y^2 - 2z^2 = 0,$
 $x + y = 5,$
 $z = 2.$

20.5. $y^2 = 2x + 1,$
 $z = x,$
 $z = 1.$

20.6. $x^2 + y^2 = 4y,$
 $z = 0,$
 $y + z = 6.$

20.7. $y^2 = 2x,$
 $x = 4,$
 $z = -2,$
 $z = 2.$

20.8. $x^2 + y^2 = 2x,$
 $z = 0,$
 $y + z = 4.$

20.9. $z^2 + x^2 = 4z,$
 $y = 0,$
 $z + y = 4.$

20.10. $x^2 + 2y^2 - z^2 = 0,$
 $y + z = 5.$

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Данко, П.Е. Высшая математика в упражнениях и задачах: В 2-х ч.: Учеб. пособие для вузов. Ч. 1 / П.Е. Данко, А.Г. Попов, Т.Я. Кожевникова. – М.: Оникс 21 век: Мир и образование, 1999. – 304 с.
2. Дураков Б.К. Краткий курс высшей алгебры: Учеб. пособие / Б.К. Дураков. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2006. – 232 с.
3. Ефимов, А.В. Сборник задач по математике: В 4-х ч.: Учеб. пособие для втузов. Ч. 1 / А.В. Ефимов, А.Ф. Каракулин, И.Б. Кожухов и др. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. – 288 с.
4. Кремер, Н.Ш. Высшая математика для экономистов: Учебник / Н.Ш. Кремер, Б.А. Путко, И.М. Тришин, М.Н. Фридман, – М.: ЮНИТИ, 2004. – 456 с.
5. Высшая математика: Учеб. пособие для дистанционного обучения. В 5 ч. Ч. 1 / В. К. Юровский, С. И. Ахмаров, Л. Ф. Нодельман и др.; Под общ. ред. И. А. Кузоватова. Красноярск: ИПЦ КГТУ, 2000. 146 с.

Учебное издание

Линейная алгебра

Составители:

Кравцова Ольга Вадимовна,
Попова Виктория Валерьевна,
Коваленко Анатолий Павлович

Подготовлено к публикации редакционно-издательским
отделом БИК СФУ

Подписано в печать 02.07.2012 г. Формат 60x84/16
Бумага офсетная. Печать плоская
Усл. печ. л.1,2.
Тираж 80 экз. Заказ 8350.

Редакционно-издательский отдел
Библиотечно-издательского комплекса
Сибирского федерального университета
660041, г. Красноярск, пр. Свободный, 79
Тел/факс (391)206-21-49. E-mail rio@sfu-kras.ru
<http://rio.sfu-kras.ru>

Отпечатано Полиграфическим центром
Библиотечно-издательского комплекса
Сибирского федерального университета
660041, г. Красноярск, пр. Свободный, 82а
Тел/факс (391)206-26-58, 206-26-49
E-mail: print_sfu@mail.ru; <http://lib.sfu-kras.ru>