

Министерство образования и науки Российской Федерации
Сибирский федеральный университет

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

**Сборник заданий
для самостоятельной работы студентов**

Красноярск
СФУ
2012

УДК 51 (07)
ББК 22.14 я 73
М34

Составители: О.В. Кравцова, В.В. Попова, А.П. Коваленко

М34 **Математический** анализ: сборник заданий для самостоятельной работы студентов [Текст] / сост. О.В. Кравцова, В.В. Попова, А.П. Коваленко. – Красноярск: Сиб. федер. ун-т, 2012. – 20 с.

Сборник содержит комплекты индивидуальных заданий для самостоятельной работы студентов первого курса по дисциплине «Математический анализ». Представлены разделы: теория пределов, дифференциальное и интегральное исчисление функций одной переменной.

Предназначен для студентов направлений подготовки 080100.62 «Экономика», 080200.62 «Менеджмент» заочной формы обучения.

УДК 51 (07)
ББК 22.14 я 73

© Сибирский
федеральный
университет, 2012

ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ

Сборник заданий предназначен для самостоятельной работы студентов направлений подготовки 080100.62, 080104.62, 080200.62 по дисциплине «Математический анализ» (заочная форма обучения, второй семестр, контрольная работа № 1). Задания соответствуют Государственным образовательным стандартам и учебной программе дисциплины.

Предлагаемый сборник содержит задания по следующим разделам:

- теория пределов,
- дифференциальное исчисление функций одной переменной,
- интегральное исчисление функций одной переменной.

При выполнении контрольной работы необходимо строго придерживаться указанных ниже правил. Работы, выполненные без соблюдения этих правил, не зачитываются и возвращаются студенту для переработки.

1. Контрольная работа выполняется в тетради в клетку (12-18 листов) чернилами любого цвета, кроме красного. Необходимо оставлять поля шириной 4-5 см для замечаний рецензента.

2. В заголовке работы на обложке тетради должны быть ясно написаны фамилия студента, его инициалы, учебный номер (шифр), номер направления подготовки (специальности), название дисциплины. В конце работы следует поставить подпись студента и дату выполнения работы.

3. В работу должны быть включены все задачи, указанные в задании, строго по положенному варианту. Вариант определяется последней цифрой учебного номера (номера зачетной книжки). Цифре 0 соответствует вариант № 10. Определив свой номер варианта, студент выполняет по одной задаче из каждых десяти, объединенных общей формулировкой. Например, варианту № 10 соответствуют задачи 1.10, 2.10, 3.10, ..., 30.10. Контрольные работы, содержащие не все задачи, либо задачи не своего варианта, не зачитываются.

4. Решения задач надо располагать в порядке возрастания их номеров, указанных в заданиях, сохраняя номера задач.

5. Перед решением каждой задачи надо полностью выписать ее условие. Переписывая условие задачи, следует заменить общие данные конкретными, взятыми из соответствующего номера.

6. Решение задач следует излагать подробно и аккуратно, объясняя и мотивируя все действия по ходу решения и делая необходимые

чертежи.

7. После получения прорецензированной работы, как незачтенной, так и зачтенной, студент должен исправить все отмеченные рецензентом ошибки и недочеты и выполнить все рекомендации рецензента.

Если рецензент предлагает внести в решения задач те или иные исправления и дополнения и прислать их для повторной проверки, то это следует сделать в короткий срок.

В случае незачета работы и отсутствия прямого указания рецензента о том, что студент может ограничиться представлением исправленных решений отдельных задач, вся работа должна быть выполнена заново.

При высылаемых исправлениях должна обязательно находиться прорецензированная работа и рецензия на нее. Поэтому рекомендуется при выполнении контрольной работы оставлять в конце тетради несколько чистых листов для всех дополнений и исправлений в соответствии с указаниями рецензента. Вносить исправления в сам текст работы после ее рецензирования запрещается.

1. Найти предел последовательности $\{a_n\}$.

- 1.1. а) $a_n = \frac{(n-8)^2 - 6n(4n-3)}{3n^2 - 6n - 2}$; б) $a_n = \frac{n - 8\sqrt{n^2 + 6n - 5}}{3n + 3}$.
- 1.2. а) $a_n = \frac{(n-8)^2 - (7n-5)^2}{(2n+3)^2 - (3n-6)^2}$; б) $a_n = \frac{\sqrt{n-8} + \sqrt{7n-5}}{3\sqrt{n} + 3}$.
- 1.3. а) $a_n = \frac{2n^2 - 3n - 1}{(4n-3)^2 + 3n(4n-3)}$; б) $a_n = \frac{9n-2}{n + 6\sqrt{n^2 - 7n - 4}}$.
- 1.4. а) $a_n = \frac{(5n-2)^2 - (6n-3)^2}{(5n+6)^2 + (7n-3)^2}$; б) $a_n = \frac{9\sqrt{n} - 2}{\sqrt{n+6} + \sqrt{n-4}}$.
- 1.5. а) $a_n = \frac{n(n+6) - (3n+7)^2}{5n^2 - 8n + 2}$; б) $a_n = \frac{4n - \sqrt{n^2 + 3n + 6}}{7n - 3}$.
- 1.6. а) $a_n = \frac{(n-3)^2 + (4n-4)^2}{(6n-4)^2 - (5n-6)^2}$; б) $a_n = \frac{\sqrt{4n-3} - \sqrt{5n+6}}{7\sqrt{n} - 3}$.
- 1.7. а) $a_n = \frac{2n^2 + 3n + 2}{3n(4n+1) - (n+5)^2}$; б) $a_n = \frac{8n-4}{3\sqrt{n^2 - n - 4} - n}$.
- 1.8. а) $a_n = \frac{(5n-4)^2 + (6n+8)^2}{(4n+7)^2 + (8n-8)^2}$; б) $a_n = \frac{8\sqrt{n} - 4}{\sqrt{n-3} - \sqrt{4n-4}}$.
- 1.9. а) $a_n = \frac{(4n+4)^2 - 5n(n+5)}{6n^2 + 6n + 3}$; б) $a_n = \frac{3n - \sqrt{n^2 + 6n - 4}}{7n + 8}$.
- 1.10. а) $a_n = \frac{(n-6)^2 - (4n-8)^2}{(5n-8)^2 - (7n+3)^2}$; б) $a_n = \frac{\sqrt{3n-6} + \sqrt{7n-4}}{7\sqrt{n} + 8}$.

Замечание. Задания 2–8 решить без использования правила Лопиталя.

2. Найти предел функции.

- 2.1. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 5x^2 - 4x + 8}{(x-3)(7x^2 + 3x - 10)}$.
- 2.2. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 - 6x^2 - 15x - 8}{5x^3 + 5x^2 - 5x - 5}$.
- 2.3. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+3)(7x^2 - 3x - 10)}{3x^3 - 2x^2 + 5x + 10}$.
- 2.4. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{4x^3 - 14x^2 + 8x + 8}{5x^3 - 18x^2 + 12x + 8}$.
- 2.5. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{6x^3 - 6x^2 - 3x - 18}{(6x-4)(3x^2 - x - 10)}$.
- 2.6. $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{5x^3 + 16x^2 + 4x - 16}{4x^3 + 13x^2 + 4x - 12}$.
- 2.7. $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{(3x+7)(x^2 - 5x - 14)}{4x^3 + 6x^2 + 4x + 16}$.
- 2.8. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x^3 - 9x^2 + 27}{3x^3 - 12x^2 - 9x + 54}$.

$$2.9. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 4x^2 + 4x - 3}{(7x - 2)(x^2 - 4x + 3)}. \quad 2.10. \lim_{x \rightarrow -3} \frac{2x^3 + 10x^2 + 6x - 18}{3x^3 + 14x^2 + 3x - 36}.$$

3. Найти предел функции.

$$3.1. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{3x^2 - x - 24}{2 - \sqrt{13 - 3x}}. \quad 3.2. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{3x^2 - 6x - 9}{\sqrt{6x + 18} - 6}.$$

$$3.3. \lim_{x \rightarrow -5} \frac{5 - \sqrt{-6x - 5}}{x^2 + 2x - 15}. \quad 3.4. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{8x - 12} - 2}{5x^2 - 4x - 12}.$$

$$3.5. \lim_{x \rightarrow -1} \frac{4x^2 + 3x - 1}{1 - \sqrt{-7x - 6}}. \quad 3.6. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{5x^2 - 9x + 4}{\sqrt{3x - 2} - 1}.$$

$$3.7. \lim_{x \rightarrow -3} \frac{2 - \sqrt{1 - x}}{2x^2 + 4x - 6}. \quad 3.8. \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{8x + 12} - 2}{x^2 - 6x - 7}.$$

$$3.9. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{5x^2 + 7x - 12}{3 - \sqrt{13 - 4x}}. \quad 3.10. \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 5x - 6}{\sqrt{8x + 12} - 2}.$$

4. Найти предел функции.

$$4.1. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \operatorname{tg} x}{\sqrt{x} e^{\sqrt{x}} - \sqrt{x}}. \quad 4.2. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{1 - \ln(e + ex)}.$$

$$4.3. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin^2 x}{\sin 2\sqrt{x} - 2 \sin \sqrt{x}}. \quad 4.4. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \operatorname{arctg} 2x}{\sqrt{4 + 8x} - 2}.$$

$$4.5. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{7 \operatorname{arctg}^2 2x}{x - xe^x}. \quad 4.6. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \arcsin x}{e - e^{4x+1}}.$$

$$4.7. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5 \sin \sqrt{x}}{\ln(3 + 4\sqrt{x}) - \ln 3}. \quad 4.8. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4 \operatorname{arctg} x^2}{3 \cos 2x - \log_3 27}.$$

$$4.9. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \arcsin 3x}{3 - \sqrt{9 + 18x}}. \quad 4.10. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^2 - e^{2+3x}}{2 \operatorname{arctg}^2 \sqrt{x}}.$$

5. Найти предел функции.

$$5.1. \lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{7 \cos x}{4 - 2^{4x/\pi}}. \quad 5.2. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3 \sin x\pi}{\ln(3x - 2)}.$$

$$5.3. \lim_{x \rightarrow 2\pi} \frac{1 + \cos \frac{x}{2}}{\sqrt{\frac{x}{2\pi}} - 1}. \quad 5.4. \lim_{x \rightarrow \pi/4} \frac{3 \cos 2x}{e^x - e^{\pi/4}}.$$

$$5.5. \lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\ln \frac{2x}{\pi}}{5 \operatorname{ctg} 3x}. \quad 5.6. \lim_{x \rightarrow \pi/6} \frac{1 + \sin 9x}{\ln \frac{6x}{\pi}}.$$

$$5.7. \quad \lim_{x \rightarrow \pi/8} \frac{2 \operatorname{ctg} 4x}{\sqrt{\frac{32x}{\pi} - 2}}.$$

$$5.8. \quad \lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{1 - \sin x}{\ln \frac{2x}{\pi}}.$$

$$5.9. \quad \lim_{x \rightarrow \pi/10} \frac{2 \cos 5x}{7 \sin 20x}.$$

$$5.10. \quad \lim_{x \rightarrow e} \frac{\ln x - 1}{x^3 - e^3}.$$

6. Найти предел функции.

$$6.1. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + \sin x} - 1}{e^{2x} - e^{3x}}.$$

$$6.2. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + \operatorname{tg} 5x)}{3^{2x} - 3^{4x}}.$$

$$6.3. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(3x^2 - x)}{x \operatorname{arctg} \frac{3x}{2}}.$$

$$6.4. \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{1}{x^3 + 2x}}{\ln \frac{2x + 3}{2x}}.$$

$$6.5. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{7^x - 8^x}{5^x - 8^x}.$$

$$6.6. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + \operatorname{tg} 3x} - 1}{\ln(1 + \sin 7x)}.$$

$$6.7. \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\operatorname{tg} \frac{x}{3x^2 + 5}}{e^{1/x} - 1}.$$

$$6.8. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin^2 \sqrt{x}}{\ln(3x + 4) - \ln 3x}.$$

$$6.9. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(5x^2 + x)}{x^3 \operatorname{tg} x}.$$

$$6.10. \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{7}{x}}{\sqrt{1 + \frac{2}{x}} - 1}.$$

7. Найти предел функции.

$$7.1. \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x - 9}{7x - 6} \right)^{2x^2 - 4}.$$

$$7.2. \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x + 6}{4 - 8x} \right)^{5x^3 - 1}.$$

$$7.3. \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{4x - 5}{6x - 4} \right)^{3x - 4}.$$

$$7.4. \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{4x + 7}{6x - 9} \right)^{x^2 - 4}.$$

$$7.5. \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{7x + 3}{9x - 5} \right)^{4x^3 - 2}.$$

$$7.6. \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{4x + 1}{9x + 4} \right)^{2x - 5}.$$

$$7.7. \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x - 7}{8x + 5} \right)^{3x^2 + 4}.$$

$$7.8. \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{5x - 4}{2 - 8x} \right)^{2x^3 + 4}.$$

$$7.9. \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x - 7}{6 - 4x} \right)^{2x - 4}.$$

$$7.10. \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x - 8}{6 - 7x} \right)^{5x^2 - 1}.$$

8. Найти предел функции.

$$8.1. \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 - 9x + 7}{x^2 - 6x - 4} \right)^{4x - 2}.$$

$$8.2. \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x - 9}{x + 7} \right)^{4x - 2}.$$

$$\begin{array}{ll}
 \mathbf{8.3.} & \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 6x - 8}{x^2 - 4x + 8} \right)^{2x+3} . \\
 \mathbf{8.4.} & \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-2}{x-1} \right)^{x+4} . \\
 \mathbf{8.5.} & \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x^2 - 3x - 1}{2x^2 - 5x + 6} \right)^{x+4} . \\
 \mathbf{8.6.} & \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-4}{x+8} \right)^{2x+3} . \\
 \mathbf{8.7.} & \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 2x - 9}{x^2 + 5x + 3} \right)^{4x+2} . \\
 \mathbf{8.8.} & \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+4}{2x+7} \right)^{4x-2} . \\
 \mathbf{8.9.} & \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{4x^2 - 6x + 3}{4x^2 + 2x + 9} \right)^{4x+5} . \\
 \mathbf{8.10.} & \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-3}{x-1} \right)^{2x+4} .
 \end{array}$$

9. Найти точки разрыва функции и определить их характер. Схематично изобразить график функции.

$$\mathbf{9.1.} \quad \text{a) } y = 3^{\frac{7}{4-x^2}}; \quad \text{б) } y = \begin{cases} -2x + 1, & x \leq 0, \\ x^2 + 1, & 0 < x < 3, \\ \frac{1}{x-7}, & x \geq 3. \end{cases}$$

$$\mathbf{9.2.} \quad \text{a) } y = e^{\sqrt{\frac{1}{x+2}}}; \quad \text{б) } y = \begin{cases} 5x, & x \leq 0, \\ x^2, & 0 < x \leq 2, \\ \frac{1}{x-3}, & x > 2. \end{cases}$$

$$\mathbf{9.3.} \quad \text{a) } y = \frac{1}{2^{x^2-1} - 1}; \quad \text{б) } y = \begin{cases} x^2, & x \leq 1, \\ 2x - 1, & 1 < x < 2, \\ \frac{1}{x-4}, & x \geq 2. \end{cases}$$

$$\mathbf{9.4.} \quad \text{a) } y = \frac{4}{5^{x-2} - 25}; \quad \text{б) } y = \begin{cases} e^x, & x \leq 0, \\ 1 - x, & 0 < x \leq 5, \\ \frac{1}{x-5}, & x > 5. \end{cases}$$

$$\mathbf{9.5.} \quad \text{a) } y = 7^{\frac{x+2}{x-3}}; \quad \text{б) } y = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x < 0, \\ x^2 + 1, & 0 \leq x \leq 2, \\ 2x + 1, & x > 2. \end{cases}$$

$$\mathbf{9.6.} \quad \text{a) } y = \frac{x^2}{4 - 2^{x+3}}; \quad \text{б) } y = \begin{cases} \operatorname{tg} x, & x \geq 0, \\ x^2, & 0 < x < 3, \\ \frac{1}{x-4}, & x \geq 3. \end{cases}$$

$$\begin{array}{ll}
\mathbf{9.7.} & \text{a) } y = \frac{2x}{3^{x-1} - 9}; \quad \text{б) } y = \begin{cases} \operatorname{arctg} x, & x \leq 0, \\ 2^x - 1, & 0 < x \leq 3, \\ \frac{1}{x-5}, & x > 3. \end{cases} \\
\mathbf{9.8.} & \text{a) } y = \frac{5x^2 + 1}{2^{2-\sqrt{x}} - 1}; \quad \text{б) } y = \begin{cases} \arcsin x, & -1 \leq x \leq 0, \\ x^2, & 0 < x \leq 3, \\ \frac{1}{2x-7}, & x > 3. \end{cases} \\
\mathbf{9.9.} & \text{a) } y = \frac{5 + \cos x}{27 - \sqrt{3^{x+1}}}; \quad \text{б) } y = \begin{cases} \frac{2}{\pi} \arccos x, & -1 \leq x \leq 0, \\ 2x^2 + 1, & 0 < x \leq 2, \\ \frac{1}{4-x}, & x > 2. \end{cases} \\
\mathbf{9.10.} & \text{a) } y = \frac{3x + 4}{5 - \sqrt{25^{x+2}}}; \quad \text{б) } y = \begin{cases} 2 \cos x, & x \leq 0, \\ 1 + 2^x, & 0 < x \leq 2, \\ \frac{1}{x-3}, & x > 2. \end{cases}
\end{array}$$

10. Найти производную функции.

$$\begin{array}{ll}
\mathbf{10.1.} & \text{a) } y = (7 \cos x + \sqrt{x}) \cdot \ln x; \quad \text{б) } y = \frac{3 \operatorname{arctg} x}{2x + 3}. \\
\mathbf{10.2.} & \text{a) } y = (2 \operatorname{tg} x - 5 \operatorname{arctg} x) \cdot \sqrt{x}; \quad \text{б) } y = \frac{7 \ln x + x^2}{3 \cos x}. \\
\mathbf{10.3.} & \text{a) } y = \left(\frac{7}{4x^3} + 5e^x \right) \cdot \arcsin x; \quad \text{б) } y = \frac{2 \operatorname{tg} x + \sqrt{x}}{3^x}. \\
\mathbf{10.4.} & \text{a) } y = \left(\frac{2}{3x^5} - 7 \cdot 2^x \right) \cdot \operatorname{tg} x; \quad \text{б) } y = \frac{2 \ln x + 7 \cos x}{\sqrt{x}}. \\
\mathbf{10.5.} & \text{a) } y = \left(3 \operatorname{arctg} x - \frac{4}{5x^3} \right) \cdot 3^x; \quad \text{б) } y = \frac{5 \arcsin x + 3\sqrt{x}}{4 \sin x}. \\
\mathbf{10.6.} & \text{a) } y = \left(\frac{4}{x^7} - 2 \ln x \right) \cdot \operatorname{arctg} x; \quad \text{б) } y = \frac{7 \cdot 3^x + 2\sqrt{x}}{\sin x}. \\
\mathbf{10.7.} & \text{a) } y = \left(3 \arcsin x - \frac{4}{7x^5} \right) \cdot 5^x; \quad \text{б) } y = \frac{7 \sin x - e^x}{2\sqrt{x}}. \\
\mathbf{10.8.} & \text{a) } y = \left(7 \arcsin x - \frac{3}{x^2} \right) \cdot \sin x; \quad \text{б) } y = \frac{8\sqrt{x} - 2 \operatorname{arctg} x}{\sqrt[3]{x}}.
\end{array}$$

$$10.9. \quad \text{a) } y = \left(8 \ln x - \frac{9}{2x^6}\right) \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^x; \quad \text{б) } y = \frac{8 \arcsin x - 2\sqrt{x}}{\operatorname{tg} x}.$$

$$10.10. \quad \text{a) } y = \left(\frac{5}{9x^7} - 2 \operatorname{arctg} x\right) \cdot 7^x; \quad \text{б) } y = \frac{3\sqrt{x} - \operatorname{tg} x}{7 \ln x}.$$

11. Вычислить значение производной функции $y(x)$ в точке $x = x_0$.

$$11.1. \quad y = 8\sqrt{\operatorname{arctg}(2x+1)} + 3 \ln\left(\frac{3\pi}{8} + 7\right); \quad x_0 = 0.$$

$$11.2. \quad y = 2 \operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{4} + \frac{1}{7}\right) + 2 \ln\left(3 + \cos\sqrt{7x^2+4}\right); \quad x_0 = 0.$$

$$11.3. \quad y = 7 \operatorname{ctg}^2(3 \ln x - 1) + \frac{5}{3\sqrt{2-1}}; \quad x_0 = e.$$

$$11.4. \quad y = 2 \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{3} + \frac{\pi}{4}\right) - \cos^3\sqrt{7x^4-1}; \quad x_0 = 1.$$

$$11.5. \quad y = \operatorname{arctg}^2(3\sqrt{2 \ln x + 9}) + \frac{3}{2\sqrt{3+1}}; \quad x_0 = e.$$

$$11.6. \quad y = \frac{2 \sin 3}{\sqrt{3}} + \sin^2(\operatorname{arctg}\sqrt{7x+1}); \quad x_0 = 5.$$

$$11.7. \quad y = \arcsin(\operatorname{tg} e^{2x-1}) + \operatorname{tg}\left(3 + \frac{\pi}{2}\right); \quad x_0 = 0.$$

$$11.8. \quad y = 2 \ln(\sqrt{3}+1) - \ln^2(\sin(7^x+2)); \quad x_0 = 0.$$

$$11.9. \quad y = 5^{2\sqrt{\cos(7x+4)}} + \sin\left(2\pi + \frac{\pi}{7}\right); \quad x_0 = -\frac{3}{7}.$$

$$11.10. \quad y = 7^{2\sqrt{3}-1} + \sqrt[3]{\operatorname{tg}(\ln(5x^2+1))}; \quad x_0 = 1.$$

12. Найти дифференциал dy функции $y = y(x)$.

$$12.1. \quad y = \frac{1}{\ln^5(3x^2-1)}.$$

$$12.2. \quad y = \frac{5}{\operatorname{tg}^2(5x^4+x-1)}.$$

$$12.3. \quad y = \frac{4\sqrt{3}}{\cos^3(2x+5)}.$$

$$12.4. \quad y = 7^{\frac{1}{\cos(2x+3)}}.$$

$$12.5. \quad y = \frac{1}{3^{\operatorname{tg}(2x+3)}}.$$

$$12.6. \quad y = \frac{1}{\operatorname{arctg}^2(5x+4)}.$$

$$12.7. \quad y = \frac{12}{\ln^3(3 \cos x + 7)}.$$

$$12.8. \quad y = 2^{\frac{1}{\sin \sqrt{x}}}.$$

$$12.9. \quad y = \frac{1}{e^{5 \operatorname{arctg} x - 1}}.$$

$$12.10. \quad y = \frac{3\sqrt{2}}{\sin^3(3x + 5)}.$$

13. Найти производную четвертого порядка y^{IV} функции $y = y(x)$.

$$13.1. \quad y = x^3 - 2 \ln(7x - 5).$$

$$13.2. \quad y = \frac{3x - 1}{2x + 4} + 4x.$$

$$13.3. \quad y = \frac{7 - 2x}{3x + 1} - 1.$$

$$13.4. \quad y = x^2 + 3 \ln(2x - 3).$$

$$13.5. \quad y = 3 + \frac{3 + 4x}{2x + 5}.$$

$$13.6. \quad y = 3x + 4 \ln(7x - 1).$$

$$13.7. \quad y = 9 - \frac{2 + 5x}{3x + 8}.$$

$$13.8. \quad y = 5x^2 - \frac{4x + 7}{2x - 3}.$$

$$13.9. \quad y = 2x^2 + 5 \ln(3x + 8).$$

$$13.10. \quad y = 3x^3 - \frac{2x + 9}{3x - 1}.$$

14. Вычислить приближенно с помощью дифференциала и на калькуляторе. Найти абсолютную и относительную погрешность.

$$14.1. \quad 3 \cdot 0,95 + \sqrt{7 \cdot (0,95)^2 + 2}.$$

$$14.2. \quad 12 \cdot 1,9 + \sqrt[3]{(1,9)^2 + 4}.$$

$$14.3. \quad \frac{4}{(-0,01)} - \sqrt{9 + 5 \cdot (-0,01)^2}.$$

$$14.4. \quad \frac{3}{0,9} - \frac{1}{\sqrt{3 \cdot (0,9)^2 + 1}}.$$

$$14.5. \quad 5 \cdot 4,1 + \sqrt{3 \cdot (4,1)^2 + 1}.$$

$$14.6. \quad \frac{2,1}{2} - \sqrt{3 \cdot (2,1)^3 + 1}.$$

$$14.7. \quad 2 \cdot 3,2 + \sqrt{3 \cdot (3,2)^2 - 2}.$$

$$14.8. \quad \frac{3}{2,9} - \frac{1}{\sqrt{2 \cdot 2,9 + 10}}.$$

$$14.9. \quad \frac{1}{2,1} - \sqrt{(2,1)^3 + 3 \cdot 2,1}.$$

$$14.10. \quad \frac{2}{1,9} - \sqrt{7 \cdot (1,8)^2 - 3}.$$

15. Решить задания **2**, **3**, **4** с использованием правила Лопиталья.

16. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = f(x)$ на указанном отрезке.

$$16.1. y = x^2\sqrt{3-x}, \quad [1; 3]. \quad 16.2. y = (x-1)\sqrt{x+2}, \quad [-2; 0].$$

$$16.3. y = \sqrt{3}x - \cos 2x, \quad [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]. \quad 16.4. y = x^2\sqrt[3]{(x+1)^2}, \quad [-2; 1].$$

$$16.5. y = \frac{(x+3)^2}{x-2}, \quad [3; 8]. \quad 16.6. y = \sqrt{3}x + \sin 2x, \quad [0; \pi].$$

$$16.7. y = \frac{2x+1}{(x+1)^2}, \quad [-0, 5; 2]. \quad 16.8. y = x^3\sqrt[3]{(x-1)^2}, \quad [-2; 2].$$

$$16.9. y = \frac{2}{x^2} + 4x - 2, \quad [-0, 5; 2]. \quad 16.10. y = \frac{x+3}{x^2+6x+10}, \quad [-3; 0].$$

17. Для развития двух предприятий выделены средства в объеме M тысяч рублей. Дополнительная прибыль на каждом предприятии при объеме капиталовложений x тысяч рублей задается функциями $f_1(x)$ и $f_2(x)$ соответственно. Распределить средства между двумя предприятиями так, чтобы суммарная дополнительная прибыль была максимальной.

$$17.1. f_1(x) = \frac{x-3}{5}, \quad f_2(x) = \sqrt{3x-2}, \quad M = 110.$$

$$17.2. f_1(x) = \frac{x-9}{3}, \quad f_2(x) = 2\sqrt{x}, \quad M = 10.$$

$$17.3. f_1(x) = \left(\frac{\sqrt{x}+9}{3}\right)^2, \quad f_2(x) = \frac{x}{2}, \quad M = 10.$$

$$17.4. f_1(x) = \ln(x+30), \quad f_2(x) = \frac{x+7}{40}, \quad M = 40.$$

$$17.5. f_1(x) = \frac{x-7}{6}, \quad f_2(x) = \sqrt{4x-5}, \quad M = 50.$$

$$17.6. f_1(x) = \frac{x-4}{4}, \quad f_2(x) = 3\sqrt{x}, \quad M = 50.$$

$$17.7. f_1(x) = \left(\frac{\sqrt{x}+4}{4}\right)^2, \quad f_2(x) = \frac{x}{3}, \quad M = 50.$$

$$17.8. f_1(x) = \ln(x+40), \quad f_2(x) = \frac{x+7}{50}, \quad M = 120.$$

$$17.9. f_1(x) = \frac{x-4}{3}, \quad f_2(x) = \sqrt{10x+6}, \quad M = 80.$$

$$17.10. f_1(x) = \frac{x-5}{5}, \quad f_2(x) = 2\sqrt{x}, \quad M = 70.$$

18. Найти асимптоты, промежутки монотонности функции $y = f(x)$. Схематично изобразить график функции.

$$18.1. \quad y = \frac{8x^2 + 6x + 13}{1 - 2x}.$$

$$18.2. \quad y = \frac{3x^2 + 4x - 6}{2x + 9}.$$

$$18.3. \quad y = \frac{6x^2 - 8x - 14}{3x - 15}.$$

$$18.4. \quad y = \frac{x^2 - 4x - 2}{8x + 4}.$$

$$18.5. \quad y = \frac{x^2 - x + 1}{5x - 5}.$$

$$18.6. \quad y = \frac{6x^2 - 5x - 1}{3x - 3}.$$

$$18.7. \quad y = \frac{3x^2 + x + 8}{9x - 9}.$$

$$18.8. \quad y = \frac{3x^2 + 2x + 6}{5x + 15}.$$

$$18.9. \quad y = \frac{x^2 + 9x + 8}{x + 1}.$$

$$18.10. \quad y = \frac{2x^2 + 2x + 8}{5x + 5}.$$

19. Исследовать функцию и построить ее график.

$$19.1. \quad y = \left(\frac{x - 3}{x + 1} \right)^2.$$

$$19.2. \quad y = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}.$$

$$19.3. \quad y = \frac{2x + 1}{x^2}.$$

$$19.4. \quad y = \frac{x^3 - 1}{2x^3}.$$

$$19.5. \quad y = \frac{(3 - x)^2}{1 - x}.$$

$$19.6. \quad y = \frac{x^2 + 1}{x}.$$

$$19.7. \quad y = \frac{2x - 1}{(x - 1)^2}.$$

$$19.8. \quad y = \frac{x^3 + 1}{x^2}.$$

$$19.9. \quad y = \frac{(x - 1)^2}{x^2 + 1}.$$

$$19.10. \quad y = \frac{x}{3 - x^2}.$$

20. Вычислить интеграл.

$$20.1. \quad \int_1^2 \frac{(2x^2 + 5)^2}{2x^3} dx.$$

$$20.2. \quad \int_2^3 \frac{(x^2 - x)^2}{3x^3} dx.$$

$$20.3. \quad \int_1^3 \frac{(3 - 2x)^2}{2x^3} dx.$$

$$20.4. \quad \int_1^2 \frac{(3x^2 - 1)^2}{x^3} dx.$$

$$20.5. \int_2^3 \frac{(4x^2 + 3)^2}{3x^3} dx.$$

$$20.6. \int_1^3 \frac{(2x^3 - x)^2}{x^5} dx.$$

$$20.7. \int_1^2 \frac{(5 - 2x^3)^2}{3x^4} dx.$$

$$20.8. \int_2^3 \frac{(7 + 2x^2)^2}{3x^3} dx.$$

$$20.9. \int_1^3 \frac{(4x - 3x^3)^2}{2x^5} dx.$$

$$20.10. \int_1^2 \frac{(2 + 5x^2)^2}{3x^3} dx.$$

21. Найти интеграл.

$$21.1. \int \left(2^x \cdot 3^x + \frac{5}{x^2} - \frac{3}{3 \cos^2 x} \right) dx.$$

$$21.2. \int \left(7x^5 - 3 \cos x + \frac{2^{x+1} + 3}{2^x} \right) dx.$$

$$21.3. \int \left(\frac{3}{\sqrt{x}} - \frac{5x^4}{2} + \frac{1}{4 \sin^2 \frac{x}{2} \cos^2 \frac{x}{2}} \right) dx.$$

$$21.4. \int \left(\frac{7}{x^4} + \frac{3 \sin x}{4} - \operatorname{ctg}^2 x \right) dx.$$

$$21.5. \int \left(e^{2x} + \frac{8}{x^3} - 5 \cos^2 x - 5 \sin^2 x \right) dx.$$

$$21.6. \int \left(\frac{8}{x^5} - \frac{2 \cdot 5^x}{3} + \frac{\operatorname{tg} x}{\sin 2x} \right) dx.$$

$$21.7. \int \left(3^x \cdot 2^{2x} + \frac{9}{x^4} - \frac{1}{8 \sin^2 \frac{x}{2} \cos^2 \frac{x}{2}} \right) dx.$$

$$21.8. \int \left(5^{2x} - \frac{3x^7}{4} + 3 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} \right) dx.$$

$$21.9. \int \left(\frac{4}{x^5} - 3^x + \frac{\operatorname{ctg} x}{3 \sin 2x} \right) dx.$$

$$21.10. \int \left(\sqrt{4^x} + \frac{7}{x^5} - \frac{3 \cos^2 x + 3 \sin^2 x}{\sin^2 x} \right) dx.$$

22. Найти интегралы.

$$22.1. \text{ а) } \int (2 \sin^2 x + 5)^2 \sin x dx; \quad \text{ б) } \int \frac{3 \operatorname{arctg} x - x + 7}{x^2 + 1} dx.$$

- 22.2. a) $\int \frac{e^x dx}{e^{2x} - 7}$; б) $\int \frac{2 \ln^2 x + 2x - 1}{x} dx$.
- 22.3. a) $\int 2^x \sin(2^{x+2} + 5) dx$; б) $\int \frac{2x + 3 - 4 \arcsin x}{\sqrt{1 - x^2}} dx$.
- 22.4. a) $\int \frac{e^{3\sqrt{x}-1} dx}{\sqrt{x}}$; б) $\int \frac{2 \operatorname{tg} x + 7 - \sin x}{\cos^2 x} dx$.
- 22.5. a) $\int \frac{\cos^3 x dx}{\sin^4 x}$; б) $\int \frac{4 - 3 \operatorname{ctg}^5 x}{\sin^2 x} dx$.
- 22.6. a) $\int \cos x \cdot 3^{2 \sin x + 7} dx$; б) $\int \frac{2 - x + 4 \operatorname{arctg} x}{1 + x^2} dx$.
- 22.7. a) $\int \frac{\sqrt{3 \ln x + 5} dx}{x}$; б) $\int \frac{4 - 3x^2 + 5 \ln^3 x}{x} dx$.
- 22.8. a) $\int (3 \cos^2 x - 1)^2 \cos x dx$; б) $\int \frac{8 - 3 \operatorname{tg}^5 x}{\cos^2 x} dx$.
- 22.9. a) $\int (3e^x - 7)e^x dx$; б) $\int \frac{e^{3-\sqrt{x}} + 2\sqrt{x} - 4}{\sqrt{x}} dx$.
- 22.10. a) $\int \frac{\sin^3 x dx}{\cos^5 x}$; б) $\int \frac{5 - \cos x + 2 \operatorname{ctg}^3 x}{\sin^2 x} dx$.

23. Вычислить интеграл.

- 23.1. $\int_2^5 \frac{3x + 5}{\sqrt{x-1}} dx$. 23.2. $\int_0^6 (x-4) \sqrt{\frac{x}{2} + 1} dx$.
- 23.3. $\int_0^9 \frac{x-3}{\sqrt{\frac{x}{3} + 1}} dx$. 23.4. $\int_0^1 (3x-1)(1-2x)^4 dx$.
- 23.5. $\int_1^4 \frac{7-x}{\sqrt{5-x}} dx$. 23.6. $\int_3^6 (3+2x) \sqrt{\frac{x}{3} - 1} dx$.
- 23.7. $\int_{-4}^0 \frac{3x-1}{\sqrt{1-2x}} dx$. 23.8. $\int_{-1}^0 \frac{3-x}{(2+x)^3} dx$.
- 23.9. $\int_{-3}^0 \frac{3+2x}{\sqrt{1-x}} dx$. 23.10. $\int_{-2}^1 \frac{(2-x)^2}{\sqrt{3+x}} dx$.

24. Вычислить интеграл.

$$24.1. \int_0^1 (2x + 5)e^x dx.$$

$$24.2. \int_0^1 (3x - 1) \sin \frac{\pi x}{2} dx.$$

$$24.3. \int_0^1 (1 - 5x) \cos 3\pi x dx.$$

$$24.4. \int_0^1 (2 - 3x)3^x dx.$$

$$24.5. \int_{-1}^1 (2x + 7) \sin \frac{\pi x}{4} dx.$$

$$24.6. \int_1^2 (3x - 1)5^x dx.$$

$$24.7. \int_0^{\pi/3} \left(3 - \frac{x}{\pi}\right) \cos x dx.$$

$$24.8. \int_0^{\pi/4} \left(2 - \frac{x}{3\pi}\right) \sin 2x dx.$$

$$24.9. \int_1^2 (5x + 1)3^{x/2} dx.$$

$$24.10. \int_1^3 (2x - 1)3^{1-x} dx.$$

25. Найти интегралы.

$$25.1. \int \frac{(7 - 4x) dx}{x^2 + 10x + 74}.$$

$$25.2. \int \frac{(6x - 8) dx}{x^2 + 8x - 33}.$$

$$25.3. \int \frac{(3 - 4x) dx}{9x^2 + 12x + 53}.$$

$$25.4. \int \frac{(1 - 4x) dx}{x^2 + 4x - 5}.$$

$$25.5. \int \frac{(3 - 3x) dx}{x^2 + 2x + 17}.$$

$$25.6. \int \frac{(1 - 2x) dx}{9x^2 + 6x - 8}.$$

$$25.7. \int \frac{(6 - 2x) dx}{x^2 - 8x + 65}.$$

$$25.8. \int \frac{(3x - 8) dx}{4x^2 + 12x - 27}.$$

$$25.9. \int \frac{(7x - 2) dx}{9x^2 - 30x + 61}.$$

$$25.10. \int \frac{(3x + 8) dx}{4x^2 - 16x - 9}.$$

26. Найти интегралы.

$$26.1. \int \frac{(x^2 + 6x - 7) dx}{(x + 2)(x^2 + x - 2)}.$$

$$26.2. \int \frac{(3x^2 - x - 8) dx}{(x + 1)(2x^2 + 5x + 3)}.$$

$$26.3. \int \frac{(3x^2 + 3x - 6) dx}{(x + 2)(2x^2 + 5x + 2)}.$$

$$26.4. \int \frac{(8x^2 + 8x + 2) dx}{(x + 1)(4x^2 + 6x + 2)}.$$

$$26.5. \int \frac{(2x^2 + 6x + 2) dx}{(x + 3)(x^2 + 5x + 6)}.$$

$$26.6. \int \frac{(9x^2 - 6x - 3) dx}{(x - 2)(3x^2 - 5x - 2)}.$$

$$26.7. \int \frac{(x^2 + 3x + 4) dx}{(x + 3)(3x^2 + 14x + 15)}. \quad 26.8. \int \frac{(6x + 2) dx}{(x + 1)(2x^2 + 3x + 1)}.$$

$$26.9. \int \frac{(3x^2 + 8x) dx}{(x + 4)(2x^2 + 12x + 16)}. \quad 26.10. \int \frac{(5x^2 - 9x + 2) dx}{(x - 2)(3x^2 - 8x + 4)}.$$

27. Вычислить интеграл.

$$27.1. \int_0^{\pi/3} \frac{2 dx}{2 \cos x - 2 \sin x + 5}. \quad 27.2. \int_0^{\pi/2} \frac{4 dx}{\cos x + \sin x + 10}.$$

$$27.3. \int_0^{2\pi/3} \frac{3 dx}{5 \cos x - 4 \sin x + 10}. \quad 27.4. \int_0^{\pi/3} \frac{6 dx}{4 \cos x - 2 \sin x + 5}.$$

$$27.5. \int_0^{\pi/2} \frac{3 dx}{4 \sin x + 6}. \quad 27.6. \int_0^{2\pi/3} \frac{5 dx}{2 \cos x + \sin x + 9}.$$

$$27.7. \int_0^{\pi/3} \frac{5 dx}{\sin x + 9}. \quad 27.8. \int_0^{\pi/2} \frac{2 dx}{3 \cos x + 3 \sin x - 7}.$$

$$27.9. \int_0^{2\pi/3} \frac{5 dx}{2 \cos x - 2 \sin x - 10}. \quad 27.10. \int_0^{\pi/3} \frac{3 dx}{2 \cos x - 4 \sin x + 8}.$$

28. Вычислить приближенно интеграл из задания 20 по формуле:

- а) трапеций,
б) Симпсона,

разбив интервал интегрирования на 10 частей. Найти абсолютную и относительную погрешность, сравнив приближенное значение с точным.

29. Вычислить несобственные интегралы или доказать их расходимость.

$$29.1. \text{ а) } \int_0^{+\infty} \frac{x dx}{16x^4 + 1}; \quad \text{ б) } \int_{-3/4}^0 \frac{dx}{\sqrt{4x + 3}}.$$

$$29.2. \text{ а) } \int_{-\infty}^0 \frac{x dx}{\sqrt{(x^2 + 4)^3}}; \quad \text{ б) } \int_{1/4}^1 \frac{dx}{20x^2 - 9x + 1}.$$

- 29.3. a) $\int_4^{+\infty} \frac{x dx}{\sqrt{x^2 - 4x + 1}};$ б) $\int_0^2 \frac{x^2 dx}{\sqrt{64 - x^6}}.$
- 29.4. a) $\int_{-1}^{+\infty} \frac{x dx}{\pi(x^2 + 4x + 5)};$ б) $\int_1^{3/2} \frac{dx}{\sqrt{3x - x^2 - 2}}.$
- 29.5. a) $\int_0^{+\infty} \frac{x dx}{4x^2 + 4x + 5};$ б) $\int_0^{1/2} \frac{dx}{(2x - 1)^2}.$
- 29.6. a) $\int_e^{+\infty} \frac{dx}{x(\ln x - 1)};$ б) $\int_{1/3}^1 \frac{\ln(3x - 1) dx}{3x - 1}.$
- 29.7. a) $\int_0^{+\infty} \frac{x^2 dx}{\sqrt{(x^3 + 8)}};$ б) $\int_1^3 \frac{dx}{\sqrt{(3 - x)^5}}.$
- 29.8. a) $\int_1^{+\infty} \frac{16x dx}{16x^4 - 1};$ б) $\int_0^1 \frac{x dx}{1 - x^4}.$
- 29.9. a) $\int_{-\infty}^{-1} \frac{7 dx}{(x^2 - 4x) \ln 5};$ б) $\int_0^4 \frac{10x dx}{\sqrt{(16 - x^2)^3}}.$
- 29.10. a) $\int_1^{+\infty} \frac{x dx}{\sqrt{16x^4 - 1}};$ б) $\int_{1/2}^1 \frac{\ln 2 dx}{(1 - x) \ln^2(1 - x)}.$

30. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями.

30.1. $y = x^2 + 5x - 3, \quad y = -3x - 18.$

30.2. $y = 3x^2 - x + 1, \quad y = 17x - 14.$

30.3. $y = -2x^2 - 2x - 2, \quad y = -16x - 18.$

30.4. $y = -5x^2 - x + 3, \quad y = 4x + 3.$

30.5. $y = -x^2 + 2x - 4, \quad y = -8x + 12.$

30.6. $y = 2x^2 - 2x - 2, \quad y = 16x - 18.$

30.7. $y = 2x^2 + 4x + 3, \quad y = -6x - 9.$

30.8. $y = -2x^2 + 5x + 2, \quad y = -x + 2.$

30.9. $y = -x^2 - 2x + 2, \quad y = 5x + 12.$

30.10. $y = -x^2 + 5x - 1, \quad y = -3x + 14.$

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Данко, П.Е. Высшая математика в упражнениях и задачах: В 2-х ч.: Учеб. пособие для вузов. Ч. 1 / П.Е. Данко, А.Г. Попов, Т.Я. Кожевникова. – М.: Оникс 21 век: Мир и образование, 1999. – 304 с.
2. Данко, П.Е. Высшая математика в упражнениях и задачах: В 2-х ч.: Учеб. пособие для вузов. Ч. 2 / П.Е. Данко, А.Г. Попов, Т.Я. Кожевникова. – М.: Оникс 21 век: Мир и образование, 1999. – 416 с.
3. Ефимов, А.В. Сборник задач по математике: В 4-х ч.: Учеб. пособие для вузов. Ч. 1 / А.В. Ефимов, А.Ф. Каракулин, И.Б. Кожухов и др. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. – 288 с.
4. Ефимов, А.В. Сборник задач по математике: В 4-х ч.: Учеб. пособие для вузов. Ч. 2 / А.В. Ефимов, А.Ф. Каракулин, С.М. Коган и др. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. – 432 с.
5. Кремер, Н.Ш. Высшая математика для экономистов: Учебник / Н.Ш. Кремер, Б.А. Путко, И.М. Тришин, М.Н. Фридман, – М.: ЮНИТИ, 2004. – 456 с.

Учебное издание

Математический анализ

Составители:

Кравцова Ольга Вадимовна,
Попова Виктория Валерьевна,
Коваленко Анатолий Павлович

Подготовлено к публикации редакционно-издательским
отделом БИК СФУ

Подписано в печать 02.07.2012 г. Формат 60x84/16
Бумага офсетная. Печать плоская
Усл. печ. л. 1,2.
Тираж 80 экз. Заказ 8351.

Редакционно-издательский отдел
Библиотечно-издательского комплекса
Сибирского федерального университета
660041, г. Красноярск, пр. Свободный, 79
Тел/факс (391)206-21-49. E-mail rio@sfu-kras.ru
<http://rio.sfu-kras.ru>

Отпечатано Полиграфическим центром
Библиотечно-издательского комплекса
Сибирского федерального университета
660041, г. Красноярск, пр. Свободный, 82а
Тел/факс (391)206-26-58, 206-26-49
E-mail: print_sfu@mail.ru; <http://lib.sfu-kras.ru>